

Programme de colle n°23

semaine du 30 mars au 3 avril

Notions vues en cours

Chapitre 29 : Applications linéaires (partie A) (suite)

- Étant donné $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de même dimension finie, f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective ssi f est inversible à droite ssi f est inversible à gauche
- Définition de “ E et F sont isomorphes”, notation $E \simeq F$, si E est de dimension finie, alors $E \simeq F$ si et seulement si F a même dimension que E , dimension de $\mathcal{L}(E, F)$
- **Rang** d’une famille de vecteurs, rang d’une application linéaire
- Si E (resp. F) est de dimension finie, alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini avec $\text{rg } f \leq \dim E$ (resp. $\text{rg } f \leq \dim F$), avec égalité ssi f est injectif (resp. f est surjectif).
- Composer un morphisme à gauche ou à droite par un isomorphisme conserve le rang (s’il existe), formule $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } g, \text{rg } f)$
- Étant donné $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le morphisme g obtenu par restriction de f à un supplémentaire de $\text{Ker } f$ et co-restriction à $\text{Im } f$ est un isomorphisme, **théorème du rang**

Chapitre 30 : Applications linéaires (partie B)

- L’application λid_E est appelée homothétie de rapport λ , elle est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$ et son inverse est $\frac{1}{\lambda} \text{id}_E$
- **Projecteur** sur F parallèlement à G (avec $F \oplus G = E$) : définition, interprétation géométrique, linéarité, propriétés $F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker } p$, tout projecteur est un projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$
- p est un projecteur ssi $p^2 = p$ et $p \in \mathcal{L}(E)$
- **Symétrie** par rapport à F parallèlement à G (avec $F \oplus G = E$) : définition, interprétation géométrique, linéarité, propriétés $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$, toute symétrie est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$
- s est une symétrie ssi $s^2 = \text{id}_E$ et $s \in \mathcal{L}(E)$, en particulier s est inversible et $s^{-1} = s$

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres 27, 28 et 29).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles. Les énoncés des définitions et théorèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. 8 questions Flash portant sur les chapitres 27, 28 et 29 en préparation du DS. Pas de question Flash supplémentaire en complément de cette question Longue.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Montrer que p est linéaire, et exprimer F et G en fonction de p . Pour F , on donnera et démontrera une expression alternative. Chapitre 30, Théorème 30.8
3.
 - Rappeler la définition de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .
 - Sans démonstration : donner une expression de F et G en fonction de s .
 - Sans démonstration : énoncer la caractérisation d'un projecteur.
 - Énoncer la caractérisation d'une symétrie : on ne montrera que le sens direct (s est une symétrie $\implies \dots$)

Chapitre 30, Définition 30.11, Théorèmes 30.10, 30.12, 30.14

Questions Flash au programme :

Chapitre 29 : (on suppose que E et F sont des $\mathbb{K}$ -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$)

- Compléter : une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si :
- Donner les définitions ensemblistes de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.
- À quelles conditions sur $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ est-ce que f est injective ? surjective ?
- Comment trouver une famille génératrice de $\text{Im } f$ à partir d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ?
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Si E et F sont de même dimension finie, que peut-on dire si f est injective ?
- Que signifie que E et F sont des espaces isomorphes ? Si $\dim E = n$, quels sont les espaces isomorphes à E ?
- Soit $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Quelle est la définition de $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$? de $\text{rg } f$?
- Si E est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Si F est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Que peut-on dire du rang de $g \circ f$ en fonction des rangs de f et de g ?
- Énoncer le théorème du rang.

Chapitre 28 : (on suppose que E est un $\mathbb{K}$ -e.v.)

- Compléter avec "libre", "liée" ou "génératrice" : toute sur-famille d'une famille est encore (plusieurs mots peuvent convenir)
- Compléter avec "libre", "liée" ou "génératrice" : toute sous-famille d'une famille est encore (plusieurs mots peuvent convenir)
- Énoncer les théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
- À quelle condition est-ce qu'un ensemble E est dit de dimension finie ? Comment définit-on alors la dimension de E , c'est-à-dire l'entier $\dim E$?

- Donner la dimension de l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et écrire trois matrices issues de sa base canonique.
- Donner la dimension de $\mathbb{K}^n$ et écrire trois vecteurs issus de sa base canonique. De plus, quelle est la dimension de $E \times F$?
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille libre de E ? On attend deux propriétés.
- Si $\dim E = n$, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille génératrice de E ? On attend deux propriétés.
- On suppose E de dimension finie et F un s.e.v. de E . Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ? On attend deux propriétés.
- Soit F, G deux s.e.v. de E . Que doit vérifier une base $\mathcal{B}$ pour être une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Énoncer la formule de Grassman pour deux s.e.v. F et G . Que devient cette formule si F et G sont en somme directe ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E . Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.

Chapitre 27 (on suppose que E est un $\mathbb{K}$ -e.v.) :

- Donner cinq $\mathbb{K}$ -e.v. usuels (rappel : la liste est $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^\Omega, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}(X), \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
- Soit $F \subset E$. Donner une caractérisation de " F est un s.e.v. de E ".
- Donner la définition en termes d'ensemble de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
- Soit A une partie de E . Compléter : $\text{Vect}(A)$ est le plus de E qui A et $\text{Vect}(A) = A$ ssi
- Donner la définition de " $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E ".
- Donner la définition de " $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre". Comment appelle-t-on une famille qui n'est pas libre ?
- Donner la définition de " $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille liée".
- Donner la définition de " u et v sont colinéaires". Que peut-on alors en déduire sur la famille (u, v) ?
- Que signifie la notation $F \oplus G$? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .
- Que signifie " F et G sont supplémentaires" ? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .